CHAPITRE 2

Fonctions élémentaires

2.1 Fonction exponentielle

Considérons la fonction suivante, définie par une série entière en z.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \end{array}$$

Son rayon de convergence est donné par la règle de d'Alembert :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0 \Longrightarrow R = \infty.$$

C'est une série qui est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2.1.1 Propriétés de la fonction f :

• $f(0) = 1$
• Pour $x \in \mathbb{R}$ on a,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \mathrm{e}^x .$$

• $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ on a :

$$f(z)f(z') = f(z + z').$$

Preuve :

$$f(z)f(z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z'^m}{m!}.$$

Puisque on a des séries qui sont absolument convergentes donc commutativement convergentes, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(z)f(z') &= \left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)\left(1+\frac{z'}{1!}+\frac{z'^2}{2!}+\frac{z'^3}{3!}+\cdots+\frac{z'^n}{n!}+\cdots\right)\\ &= 1+\left(\frac{z'}{1!}+\frac{z}{1!}\right)+\left(\frac{z'^2}{2!}+\frac{zz'}{1!1!}+\frac{z^2}{2!}\right)+\left(\frac{z'^3}{3!}+\frac{z'^2z}{2!1!}+\frac{z'z^2}{1!2!}+\frac{z^3}{3!}\right)\\ &\quad+\cdots+\left(\frac{z'^n}{n!}+\frac{z'^{n-1}z}{(n-1)!1!}+\cdots+\frac{z'^{n-p}z^p}{(n-p)!p!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\right)+\cdots \end{aligned}$$

Remarquons que $\dfrac{1}{(n-p)!p!}=\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{n!}{(n-p)!p!}=\dfrac{1}{n!}\mathrm{C}_n^p$; d'où l'on a :

$$\begin{aligned} f(z)f(z') &= 1+\frac{1}{1!}(z'+z)+\frac{1}{2!}\left(\mathrm{C}_2^0z'^2+\mathrm{C}_2^1z'z+\mathrm{C}_2^2z^2\right)+\frac{1}{3!}\left(\mathrm{C}_3^0z'^3+\mathrm{C}_3^1z'^2z+\mathrm{C}_3^2z'z^2+\mathrm{C}_3^3z^3\right)\\ &\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\mathrm{C}_n^0z'^n+\mathrm{C}_n^1z'^{n-1}z+\cdots+\mathrm{C}_n^pz'^{n-p}z^p+\cdots+\mathrm{C}_n^nz^n\right)+\cdots \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$f(z)f(z')=1+(z+z')+\frac{1}{2!}(z+z')^2+\frac{1}{3!}(z+z')^3+\cdots+\frac{1}{n!}(z+z')^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+z')^n}{n!}=f(z+z').$$

Par analogie avec la fonction exponentielle réelle, et les trois propriétés pécédentes, adoptons la notation suivante,

$$\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\ \mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots}$$

• $\forall z\in\mathbb{C},\ \mathrm{e}^z\neq 0.$
Preuve : Supposons qu'il existe $z\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^z=0$,

$$1=\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^{z-z}=\mathrm{e}^z\cdot\mathrm{e}^{-z}=0\cdot\mathrm{e}^{-z},$$

comme la série converge pour tout z dans $\mathbb{C}$; donc e^{-z} est fini, donc $0\cdot\mathrm{e}^{-z}=0$, l'égalité est impossible. En conclusion,

$$\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\quad \mathrm{e}^z\neq 0;\quad \mathrm{e}^{-z}=\frac{1}{\mathrm{e}^z}\cdot}$$

2.1.2 Formule d'Euler

Considérons le cas où $z=iy$ avec y dans $\mathbb{R}$, e^{iy} prend une forme très intéressante.

$$\mathrm{e}^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=1+(iy)+\frac{1}{2!}(iy)^2+\frac{1}{3!}(iy)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(iy)^n+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right).$$

On reconnaît le développement en série entière des fonctions sinus et cosinus, d'où :

$$\boxed{\forall y\in\mathbb{R},\quad \mathrm{e}^{iy}=\cos y+i\sin y.}$$

C'est la célèbre formule d'Euler.
Rappelons les deux relations suivantes,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1.3 Périodicité de l'exponentielle :

Les deux fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π, on a :
$\forall z \in \mathbb{C},\ \forall k \in \mathbb{Z},$

$$\begin{aligned} e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad &= e^x(\cos(y + 2k\pi) + i \sin(y + 2k\pi)) \\ &= e^x\, e^{i(y+2k\pi)} = e^{(x+iy)+2k\pi i} = e^{z+2k\pi i}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad e^z = e^{z+2k\pi i}.$$

La fonction exponentielle est périodique, de période $2\pi i$.

2.1.4 Partie réelle et partie imaginaire de l'exponentielle :

Posons $z = x + iy$, x et y deux réels ;

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \,.\, e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

D'où l'on a :

$$\begin{cases} \mathscr{Re}(e^z) = e^x \cos y \\ \mathscr{Im}(e^z) = e^x \sin y. \end{cases}$$

2.1.5 Holomorphie de l'exponentielle :

Montrons que la fonction exponentielle est holomorphe dans $\mathbb{C}$, pour cela montrons que la partie réelle et la partie imaginaire vérifient les deux conditions de Cauchy-Riemann, on a $\mathscr{Re}(e^z) = e^x \cos y = P(x, y)$ et $\mathscr{Im}(e^z) = e^x \sin y = Q(x, y)$ d'où :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} = (e^x \cos y)'_x = e^x \cos y \\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = (e^x \sin y)'_y = e^x \cos y. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = (e^x \cos y)'_y = -\,e^x \sin y \\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = (e^x \sin y)'_x = e^x \sin y. \end{cases}$$

Les deux conditions sont vérifiées, e^z est dérivable et on a :

$$\frac{d}{dz}(e^z) = \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = (e^x \cos y)'_x + i(e^x \sin y)'_x = e^x \cos y + i\, e^x \sin y = e^z$$

La fonction exponentielle est égale à sa propre dérivée.
On pouvait procéder d'une autre manière.
Dans la série qui définie l'exponentielle ne figure pas le terme en $\overline{z}$, on a donc $\dfrac{\partial\, e^z}{\partial \overline{z}} = 0,$

donc e^z est dérivable dans $\mathbb{C}$.
Pour la dérivée on a ;

$$(e^z)' = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\right)' = 0 + 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = e^z .$$

2.1.6 Fonctions hyperboliques

On définit les fonctions «cosinus hyperbolique» et «sinus hyperbolique» , et qu'on note respectivement ch et sh par,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

On définit la fonction «tangente hyperbolique» et qu'on note th par,

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \text{ où } z \in \mathbb{C} \text{ et } z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les fonctions ch et sh sont périodiques de période $P = 2\pi i$, la fonction th a pour période $P = \pi i$.
On définit aussi la «cotangentehyperbolique» comme l'inverse de la «tangentehyperbolique» et on la note coth.
Le développement en série entière pour les fonctions ch et sh est facile à donner et on a pour tout z dans $\mathbb{C}$:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Toutes les relations fonctionnelles suivantes sont faciles à prouver, en passant directement à l'exponentielle par exemple.

Pour tout z dans $\mathbb{C}$ on a : $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$

et aussi pour tout z dans $\mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z, && \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z.\\
&\operatorname{ch}(z + i\pi) = -\operatorname{ch} z, && \operatorname{sh}(z + i\pi) = -\operatorname{sh} z.\\
&\operatorname{ch}\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = i \operatorname{sh} z, && \operatorname{sh}\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = i \operatorname{ch} z.\\
&\operatorname{ch}(z + z') = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z', && \operatorname{sh}(z + z') = \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{ch} z \operatorname{sh} z'.\\
&\operatorname{ch}(2z) = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = 2\operatorname{ch}^2 z - 1 = 2\operatorname{sh}^2 z + 1, && \operatorname{sh}(2z) = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z.
\end{aligned}$$

Pour les dérivées on a :

$$\begin{array}{lrcl}
 & (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z & \& & (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z\\
\forall n \in \mathbb{N} & (\operatorname{sh} z)^{(2n)} = \operatorname{sh} z & \& & (\operatorname{ch} z)^{(2n)} = \operatorname{ch} z\\
\forall n \in \mathbb{N} & (\operatorname{sh} z)^{(2n+1)} = \operatorname{ch} z & \& & (\operatorname{ch} z)^{(2n+1)} = \operatorname{sh} z
\end{array}$$

On a aussi :

$$\text{pour } z, z' \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z} \text{ on a } \operatorname{th}(z + z') = \frac{\operatorname{th} z + \operatorname{th} z'}{1 + \operatorname{th} z \operatorname{th} z'}$$

$$(\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} = 1 - \operatorname{th}^2 z$$

2.1.7 Fonctions trigonométriques

Par analogie avec les foncions sh et ch et la formule d'Euler, on définit $\sin z$ et $\cos z$ pour z complexe et ceci en posant :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Ces deux fonctions sont périodiques de période 2π, On définit aussi la «tangente» qu'on note tg, et son inverse la «cotangente» et on la note cotg. Elles sont impaires et périodiques de période π.
Le développement en série entière pour les fonctions cos et sin est facile à donner et on a pour tout z dans $\mathbb{C}$:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On définit aussi

$$\begin{cases} \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} & z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{cotg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z} & z \neq \pi + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Immédiatement on a :

1. • $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z$ 2. • $\operatorname{sh}(iz) = i \sin z$
3. • $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$ 4. • $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$
5. • $\operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z$ 6. • $\operatorname{th}(iz) = i \operatorname{tg} z$
7. • $\operatorname{cotg}(iz) = -i \coth z$ 8. • $\coth(iz) = -i \operatorname{cotg} z$

Ces formules permettent de retrouver toutes les relations fonctionnelles des fonctions circulaires connaissant celles des fonctions hyperboliques, et réciproquement.
Exemple : Pour tout t dans $\mathbb{C}$ on a :
$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \Longleftrightarrow \cos^2(it) - (-i \sin)^2(it) = 1 \Longleftrightarrow \cos^2(it) + \sin^2(it) = 1.$
Posons $it = z \in \mathbb{C}$, on a donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } z \text{ dans } \mathbb{C} \text{ on a : } \cos^2 z + \sin^2 z = 1}$$

Remarque très importante :
Pour tout z dans $\mathbb{R}$ les fonctions sinus et cosinus sont bornées.

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin z \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos z \leqslant 1$$

Par contre pour z dans $\mathbb{C}$ on peut avoir $|\cos z| > 1$ ou $|\sin z| > 1$, et en général l'équation $\sin z = a$ a toujours des solutions pour tout a dans $\mathbb{C}$.

2.1.8 Fonction Logarithme

Problème :
Trouver tous les nombres complexes t tels que $e^t = z$ où z est un complexe donné.
Solution :
Puisque $\forall t \in \mathbb{C}, \ e^t \neq 0$, donc nécessairement $z \in \mathbb{C}^*$.
Posons $t = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R}$ et $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta), \ \rho > 0, \ \theta \in \mathbb{R}$.

On a donc :
$e^t = z \iff e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.
L'égalité des modules donne : $e^x = \rho \iff x = \operatorname{Log}\rho$.
Le système $\begin{cases}\cos y = \cos\theta \\ \sin y = \sin\theta\end{cases} \iff y = \theta + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$.
Finalement $t = \operatorname{Log}\rho + i(\theta + 2k\pi) = \operatorname{Log}|z| + i(\arg z + 2k\pi)$.
Comme $\arg(z)$ est défini à un multiple entier de 2π près ; alors on définit «logarithme du nombre complexe z » ; par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|z| + i\arg z.$$

Définition 2.1.1
On appelle détermination principale du logarithme d'un nombre complexe $z \neq 0$, le nombre :

$$\forall z \neq 0, \quad \operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|z| + i\arg z, \quad \textit{où} \quad 0 \leqslant \arg z < 2\pi.$$

Remarque 2.1.1 *L'égalité* $\operatorname{Log}(z.z') = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(z')$, *n'est pas toujours vraie ; mais la différence est un multiple entier de* $2\pi i$, *c'est à dire ;*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad \operatorname{Log}(z.z') \equiv \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(z') \quad \text{modulo}[2\pi i].$$

Exemple : Utilisons la détermination principale du logarithme :
$\operatorname{Log}(-1-i) = \operatorname{Log}|-1-i| + i\arg(-1-i) = \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2 + \frac{5\pi}{4}i$.
$\operatorname{Log}(-1) = \operatorname{Log}|-1| + i\arg(-1) = \pi i$.
$\operatorname{Log}(-1-i)(-1) = \operatorname{Log}(1+i) = \operatorname{Log}|1+i| + i\arg(1+i) = \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2 + \frac{\pi}{4}i$.
d'où :
$\operatorname{Log}(-1-i)(-1) - \Big(\operatorname{Log}(-1-i) + \operatorname{Log}(-1)\Big) = \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2 + \frac{\pi}{4}i - \left(\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log} 2 + \frac{5\pi}{4}i\right) + (\pi i)\right) = -2\pi i$.
La fonction exp étant périodique, on ne peut pas définir sa réciproque d'une façon unique et définitive.

2.1.9 Exercices résolus

Exercice 1.
Soit a un nombre réel donné, résoudre et discuter dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\sin z = a$.
Solution :
$\sin z = a \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = a \iff e^{2iz} - 1 = 2ia\, e^{iz}$.
Posons : $e^{iz} = X \neq 0$, on a donc $X^2 - 2iaX - 1 = (X - ia)^2 + a^2 - 1 = 0$.
<u>1er cas</u> :$a = 1$ (ou $a = -1$).
On a une solution double ; $X = i$ (ou $X = -i$ pour $a = -1$) $\iff z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
(ou $z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ pour $a = -1$)
<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> :$|a| < 1$.
Deux racines distinctes ; $X_1 = ia + \sqrt{1-a^2}$ et $X_2 = ia - \sqrt{1-a^2}$.
On a donc les deux solutions :
$iz_1 = \operatorname{Log}(ia + \sqrt{1-a^2})$ et $iz_2 = \operatorname{Log}(ia - \sqrt{1-a^2})$, comme $|ia \pm \sqrt{1-a^2}| = 1$, posons $\arg(ia + \sqrt{1-a^2}) = \theta$ et donc $\arg(ia - \sqrt{1-a^2}) = \pi - \theta$.

$z_1 = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ et $z_2 = \pi - \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$; ce sont donc des racines réelles.
3ème cas :$|a| > 1$.
Deux racines distinctes ; $X_1 = i(a + \sqrt{a^2 - 1})$ et $X_2 = i(a - \sqrt{a^2 - 1})$.
On a donc les deux solutions :
• Si $a > 1$, alors $a + \sqrt{a^2 - 1} > 0$ et donc $|a + \sqrt{a^2 - 1}| = a + \sqrt{a^2 - 1}$
et $\arg(i(a + \sqrt{a^2 - 1})) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. D'où $iz_1 = \text{Log}(a + \sqrt{a^2 - 1}) + i(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi) \Longleftrightarrow z_1 = (\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi) - i\,\text{Log}(a + \sqrt{a^2 - 1})$
• Si $a < -1$, alors $a + \sqrt{a^2 - 1} > 0$ et donc $|a + \sqrt{a^2 - 1}| = -a - \sqrt{a^2 - 1}$.
et $\arg(i(a + \sqrt{a^2 - 1})) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. D'où $iz_2 = \text{Log}(-a - \sqrt{a^2 - 1}) + i(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi) \Longleftrightarrow z_1 = (-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi) - i\,\text{Log}(-a - \sqrt{a^2 - 1})$.
Comme on devait s'y attendre, dans les deux cas $a > 1$ ou $a < -1$ aucune racine n'est réelle.

Exercice 2.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$e^z = 1 + i.$$

Solution.
Première méthode :
Posons $z = x + iy$, l'équation est donc équivalente à :
$e^x(\cos y + i \sin y) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$; d'où l'on tire ;

$$\begin{cases} e^x = \sqrt{2} \\ y = \pi/4 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \text{Log}\ \sqrt{2} \\ y = \pi/4 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Finalement,

$$z = \text{Log}\ \sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Deuxième méthode :

$$e^z = 1 + i \Longrightarrow z = \text{Log}(1 + i) = \text{Log}\,|1 + i| + i \arg(1 + i) = \text{Log}\ \sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi); \ k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 3.
Donner le module de $f(z) = \sin z$.
Solution :
On a $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $x, y \in \mathbb{R}$.
$f(z) = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \,\text{ch}\, y + \cos x(i \,\text{sh}\, y)$.

$$\sin(x + iy) = \sin x \,\text{ch}\, y + i \cos x \,\text{sh}\, y.$$

D'où l'on tire,

$$\begin{cases} \mathscr{R}e(f(z)) = \sin x \,\text{ch}\, y \\ \mathscr{I}m(f(z)) = \cos x \,\text{sh}\, y. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= (\sin x \,\text{ch}\, y)^2 + (\cos x \,\text{sh}\, y)^2 = \sin^2 x \,\text{ch}^2\, y + \cos^2 x \,\text{sh}^2\, y \\ &= \sin^2 x(1 + \text{sh}^2\, y) + (1 - \sin^2 x)\,\text{sh}^2\, y = \sin^2 x + \text{sh}^2\, y \\ &= (1 - \cos^2 x)\,\text{ch}^2\, y) + \cos^2 x(\text{ch}^2\, y - 1) = \text{ch}^2\, y - \cos^2 x. \end{aligned}$$

D'où l'on tire deux formules pour le module,

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x + \text{sh}^2\, y}, \\ &= \sqrt{\text{ch}^2\, y - \cos^2 x}. \end{aligned}$$

Exercice 4.
Donner le logarithme du nombre $z = -22 + 21i$.
Solution :
Par définition on a,

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(-22 + 21i) = \operatorname{Log}|-22 + 21i| + i \operatorname{Arg}(-22 + 21i).$$

.1 $|-22 + 21i| = \sqrt{22^2 + 21^2} = 29$.
.2 Soit *theta* un argument de $-22 + 21i$, on peut observer que l'on peur écrire $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ou bien $\theta = \pi - \beta$.
On a donc, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{22}{21}$ et $\operatorname{tg} \beta = \frac{21}{22}$, on obtient alors $\theta = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctg} \frac{22}{21}$, finalement ;

$$\operatorname{Log}(-22 + 21i) = \operatorname{Log} 29 + i\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctg} \frac{22}{21} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ou encore,

$$\operatorname{Log}(-22 + 21i) = \operatorname{Log} 29 + i\left(\pi - \operatorname{Arctg} \frac{21}{22} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que $\forall a \neq 0, \forall b \neq 0, \ \operatorname{Arctg} \frac{a}{b} + \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2}$ si $ab > 0$ et vaut $-\frac{\pi}{2}$ si $ab < 0$.